

ETUDE D'UNE PERTURBATION D'OBSTACLE DANS UN ECOULEMENT NON-PERMANENT PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

THESE

présentée à la

Faculté des Sciences de l'Université de Nancy

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR INGENIEUR

par

Mohamed AZZEDINE

soutenue le 17 Juin 1970

devant la commission d'examen

2

Jury : M. J. LEGRAS , Président

M. M. DEPAIX , Examineur

M. C. GILORMINI , Examineur



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551920_0004

ETUDE D'UNE PERTURBATION D'OBSTACLE
DANS UN ECOULEMENT NON-PERMANENT
PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

par Mohamed AZZEDINE

ETUDE D'UNE PERTURBATION D'OBSTACLE
DANS UN ECOULEMENT NON-PERMANENT
PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES



ANNEE SCOLAIRE 69/70

DOYEN : M. AUBRYASSEESSEUR : M. GAYDoyens honoraires : MM. CORNUBERT - RCUBAULTProfesseurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITE - LERAY - JOLY -
LAPORTE d- EICHBOEN - CAPELLE - LETCOT - GODEMENT - DUBREIL -
L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - LONGCHAMON - DODE - GAUTHIER -
GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHLMaîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET -
Melle MATHIEU.PROFESSEURS

MM. RCUBAULT	Géologie	GAYET	Physiologie
VEILLET	Biologie Animale	HADNI	Physique
BARRICL	Chimie Théorique	*BASTICK	Chimie
BIZETTE	Physique	DUCHAUFOR	Pédologie
GUILLIEN	Electronique	GARNIER	Agronomie
LEGRAS	Mécanique Rationnelle	NEEL	Chimie Org, Ind.
BOLFA	Minéralogie	BERNARD	Géologie Appliq.
NICLAUSE	Chimie	*CHAMPIER	Physique
FAIVRE	Physique Appliquée	*GAY	Chimie Biolog.
AUBRY	Chimie Minérale	STEPHAN	Zoologie
COPPENS	Radiogéologie	*CONDE	Zoologie
DUVAL	Chimie	*WERNER	Botanique
FRUHLING	Physique	EYMARD	Calcul différentiel et intégral
HILLY	Géologie		
LE GOFF	Génie Chimique	FELDEN5	Physique
SUHNER	Physique Expériment.	*GOSSE	Mécanique phys.
CHAPON	Chimie Biologique	*DAVOINE	Physique (ENSMIN)
HEROLD	Chimie Minérale Indus.	HORN	Physique (1 Cycle)
SCHWARTZ	Exploitation Minière	*ROCCI	Géologie
MALAPRADE	Chimie	*Mme LUMER	Mathématiques
*MANGENOT	Botanique	DELPUECH	Chimie physique
BLAZY	Minéralogie Appliquée	Melle HUET	Analyse Supér.

N... Chimie Biologique.
N... Mécanique Appliquée
N... Méthodes Mathématiques de la Physique
N... Mécanique Rationnelle

(*) Professeur titulaire à titre personnel.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme BASTICK	Chimie P.C. EPINAL	JANOT	Physique P.C. EPINAL
M.M. GUDEFIN	Physique	CACHAN	Entomologie Appliquée (ENSA)
VUILLAUME	Psychophysiologie	JACQUIN	Pédologie & chimie agr.
FRENTZ	Biologie Animale	MAINARD	Physique M.P.
MARI	Chimie (ISIN)	MARTIN	Chimie P.C.
DEVIOT	Physique du solide	FAULMIER	Mécanique Expérim.
FLECHON	Physique P.C.	PECTAS	Minéralogie
VIGNES	Métallurgie	RIVAIL	Chimie Appl. (CUCES)
JURAIN	Géologie C.B.G.	DEPAIX	Probabilité et Statist.
BALESDENT	Thermodynamique, Chimie Appliquée (ENSIC)		

MAITRES DE CONFERENCES

MM. VILLERMAUX	Génie Chimique	FERRIER	Mathématiques
METCHE	Biochimie Appliquée (BRASSERIE)	GILORMINI	Mécanique des Fluides (ISIN)
BAUMANN	Physique (1 Cycle)	HILY	Mathématiques P.C.
DURAND	Physique	CASTRO	Chimie Organique
GRANGE	Physique (ISIN)	DEMHEMER	Botanique
BAVEREZ	Chimie (ENSIC)	NOVERRAZ	Mathématiques
CHAMBCN	Exploitation Minière (MINES)	TOURET	Géologie
HUSSON	Physique (ENSEM)	N...	Maths Appliquées
WEISSLINGER	Physique	N...	Mathématiques
GERL	Physique (ENSEM)	N...	Mathématiques
ROQUES	Chimie dMinérale	N...	Physiologie animale
		N...	Chimie (ENSIC)
		N...	Laiterie (ECCLE LAIT.)
		N...	Chimie Organique
		N...	Mathématiques Appl.

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

MM. AMARIGLIO - COEURE - DAVRAINVILLE - GIRARDEAU - OVAERT - RUYER - WEBER - PUJOL - SCHREIBER.

اطلبوا العلم من المهد إلى اللحد

Il faut étudier depuis le berceau jusqu'à la tombe

Mahomet

A mes parents,

A ma femme,

Le présent travail a été effectué sous la direction de
Monsieur le Professeur J. LEGRAS, Directeur de l'Institut Universitaire
de Calcul Automatique.

Je tiens à lui exprimer ici ma reconnaissance pour l'aide qu'il n'a
cessé de m'apporter, pour la formation à la recherche qu'il m'a donnée et
pour l'enseignement qui m'a été dispensé à l'IUCA.

Je remercie Monsieur le Professeur DEPAIX et Monsieur GILORMINI
Maître de Conférences, de l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire
partie du jury.

Je n'oublie pas l'aide apportée par mes collègues de l'IUCA. Je les
en remercie tous et en particulier Mademoiselle COLIN qui a permis la
réalisation matérielle de ce travail.

Ce travail a été effectué dans le cadre de la

Convention D. R. M. E. n° 68-34-398

PLAN

Pages

Introduction

1ère partie : ETUDE D'UNE PERTURBATION DE RELIEF PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

I - Formulation du problème

I-1. Rappel des équations générales d'un écoulement	1
I-2. Définition du modèle mathématique	3
I-3. Conditions initiales	4
I-4. Conditions aux limites	5
I-5. Equations sans dimensions	7

II - Présentation du schéma aux différences finies

II-1. Définition du maillage	12
II-2. Approximations des dérivées d'espace	15
II-2.1. Points irréguliers	
II-2.1.1. Côté gauche de la montagne	17
II-2.1.2. Côté droit de la montagne	20
II-2.2. Points réguliers	
II-2.2.1. Schéma du 1e type	22
II-2.2.2. Schéma du 2e type	26
II-2.2.3. Schéma du 3e type	27
II-2.2.4. Schéma du 4e type	28
II-3. Essais expérimentaux	30

2ème partie : THEORIE ET APPLICATION DE LA STABILITE AU PROBLEME

DE PERTURBATION DE RELIEF

I - Etude théorique de la stabilité

I-1. Définition de la stabilité	36
I-2. Condition nécessaire de stabilité locale de Von-Neumann	37
I-3. Condition suffisante de stabilité locale	39
I-4. Critère pratique de stabilité locale	40

II - Applications aux schémas de différences finies

II-1. Etude de la stabilité par la condition suffisante	40
II-2. Amélioration de la stabilité	44
II-3. Etude de la convergence	49
II-4. Etude de la stabilité par la condition nécessaire	54

III - Résultats expérimentaux 58

Conclusion.

Introduction

Il s'agit d'étudier la déformation d'un courant atmosphérique horizontal par une chaîne de montagne abordée transversalement. L'écoulement s'effectue dans un plan vertical $(0x, 0z)$.

L'étude de cette perturbation d'obstacle se ramène à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires avec des conditions initiales et des conditions aux limites sur l'obstacle. Les grandeurs caractéristiques de l'écoulement (vitesse, pression, densité) ne sont pas connues au cours du temps sur l'obstacle. Elles vérifient un système d'équations aux dérivées partielles.

Connaissant peu de choses sur les solutions analytiques, les auteurs qui ont étudié de tels problèmes, ont introduit des hypothèses simplificatrices.

L'hydrodynamique classique suppose que le fluide est incompressible, non visqueux et que l'écoulement est permanent. La résolution par linéarisation des équations de base de l'écoulement se limite à l'étude de perturbations infiniment petites. L'emploi des méthodes de différences finies permet d'éliminer ces hypothèses restrictives et d'aborder l'étude des écoulements non permanents.

Le but de ce travail est d'intégrer le système d'équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies et de déterminer sous quelles conditions le schéma proposé est stable.

La première partie est consacrée à la formulation du modèle mathématique et à la présentation d'un schéma aux différences finies.

Dans la seconde partie, nous présentons un bref rappel de la théorie de la stabilité et appliquons le critère de stabilité choisi aux schémas de différences finies adoptés. Toutefois, la détermination pratique du pas de stabilité reste un problème difficile.

1ère PARTIE

ETUDE D'UNE PERTURBATION DE RELIEF
PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

I - FORMULATION DU PROBLEME

I-1. Rappel des équations générales d'un écoulement

Avant de commencer cette étude, il nous semble nécessaire de rappeler les équations fondamentales de la mécanique des fluides.

Considérons un fluide en mouvement par rapport à un repère fixe $Oxyz$. Soit $\vec{V}$ la vitesse d'une particule située en $M(x, y, z)$, de densité ρ , soumise à la pression P . On démontre que le mouvement du fluide est régi par les équations générales suivantes :

- Equation de continuité ou de conservation de la masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (I. 1)$$

- Equation de mouvement ou de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \bar{\bar{V}}_i - \operatorname{grad} P \quad (I. 2)$$

$\bar{\bar{V}}_i$ est le tenseur des contraintes dû à la viscosité

$\vec{F}$ forces extérieures

Si le fluide n'est pas visqueux, on a $\operatorname{div} \bar{\bar{V}}_i = 0$

- Equation de l'énergie ou de conservation de l'énergie

$$\rho \frac{De_i}{Dt} = \bar{T} \text{grad } V \quad (I. 3)$$

e_i est l'énergie interne par unité de masse

$\bar{T}$ est le tenseur des contraintes en M

$$\bar{T} = \bar{V} - P \bar{I}$$

$\bar{I}$ est le tenseur unité ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ sinon $\delta_{ij} = 1$)

Pour les fluides non visqueux $\bar{V}_i = 0$ et on a

$$\rho \frac{De_i}{Dt} = -P \text{div } \vec{V}$$

$\frac{D}{Dt}$ est la dérivée lagrangienne

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

(u, v, w) sont les composantes de la vitesse.

Aux équations (I. 1), (I. 2) et (I. 3) il faut ajouter l'équation d'état du fluide :

$$F(P, \rho) = 0$$

Elle permet d'exprimer l'énergie interne e_i en fonction de P et ρ . Il y a deux points de vue différents pour résoudre ces équations selon que l'on se place en coordonnées eulériennes ou en coordonnées lagrangiennes. Dans le premier cas, on se trouve en des points fixes et on étudie les grandeurs caractéristiques de l'écoulement en ce point. Dans le second cas, on suit les particules dans leur mouvement.

Dans le travail qui suit, nous adopterons le premier point de vue.

I-2. Définition du modèle mathématique

Il s'agit d'étudier la déformation d'un courant atmosphérique horizontal par une chaîne de montagne abordée transversalement. L'écoulement de l'air s'effectue dans un plan vertical (0x, 0z). La montagne a des dimensions infinies suivant 0y.

La rotation de la terre est négligeable et le champ de la pesanteur est uniforme et d'intensité g.

L'air est considéré comme un fluide compressible et non visqueux. L'hypothèse de fluide non visqueux peut être omise par la suite.

L'écoulement est supposé adiabatique.

Le système de référence est un système de deux axes rectangulaires, avec 0x horizontal et 0z vertical ascendant.

D'après les équations fondamentales exposées ci-dessus, les équations qui régissent l'écoulement sont :

- Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (I. 4)$$

- Equations du mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (I. 5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g = 0 \quad (I. 6)$$

- Equation de l'énergie

L'hypothèse d'écoulement adiabatique entraîne :

$$\frac{D}{Dt} (P \rho^{-\gamma}) = 0$$

En tenant compte de l'équation de continuité (I. 1), on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + w \frac{\partial P}{\partial z} + \gamma P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (I. 7)$$

Les inconnues sont :

- $u(x, z, t)$ et $w(x, z, t)$ composantes de la vitesse de l'écoulement suivant Ox et Oz respectivement.

- $\rho(x, z, t)$ la densité

- $P(x, z, t)$ la pression

Ces quatre équations constituent un système d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires.

L'étude de la déformation du courant atmosphérique horizontal se ramène à l'intégration de ce système. On en déduit alors la vitesse $\vec{V}$, la pression P et la densité ρ en chaque point (x, z) et à chaque instant t . Pour déterminer les quatre grandeurs qui définissent l'écoulement, il faut tenir compte non seulement du système d'équations aux dérivées partielles mais aussi des conditions initiales et des conditions aux limites.

I-3. Conditions initiales

L'état initial qui nous a été donné, est déterminé par la donnée du champ des vitesses, de la densité et de la pression.

$$u(x, z, 0) = U_{\infty} \left(1 + 2 \frac{z}{b^2} B \exp \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) \right)$$

$$w(x, z, 0) = -2 U_{\infty} B \frac{x}{a} \exp \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right)$$

$$\rho(x, z, 0) = \rho_0 e^{-sz}$$

$$P(x, z, 0) = \rho_0 \frac{g}{s} e^{-sz}$$

a, b, B sont données. Elles caractérisent l'obstacle

avec $\rho_0 = 1 \text{ Kg/m}^3$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$s = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

Remarquons que le champ des vitesses est rotationnel ce qui entraîne la formation de tourbillons au cours du mouvement.

Les lignes de courant, courbes tangentes au vecteur vitesse, ont l'aspect d'une courbe en cloche symétrique par rapport à $0z$.

Le profil du sol est confondu avec une de ces lignes de courant.

Pour $|x|$ et z suffisamment grands, les lignes de courant sont des droites parallèles à $0x$. On a alors un courant uniforme de vitesse U_{∞} ($U = U_{\infty}$, $w = 0$).

La densité et la pression correspondent à une atmosphère standard. Elles sont indépendantes de x et décroissent exponentiellement en fonction de z .

I-4. Conditions aux limites

Dans la plupart des études faites sur les équations de Navier-Stokes (Rapport SEMA 1967, RICHTMYER) la vitesse, la pression et la densité sont supposées connues en fonction du temps sur l'obstacle.

- Equation de l'énergie

L'hypothèse d'écoulement adiabatique entraîne :

$$\frac{D}{Dt} (P \rho^{-\gamma}) = 0$$

En tenant compte de l'équation de continuité (I. 1), on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + w \frac{\partial P}{\partial z} + \gamma P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (I. 7)$$

Les inconnues sont :

- $u(x, z, t)$ et $w(x, z, t)$ composantes de la vitesse de l'écoulement suivant Ox et Oz respectivement.

- $\rho(x, z, t)$ la densité

- $P(x, z, t)$ la pression

Ces quatre équations constituent un système d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires.

L'étude de la déformation du courant atmosphérique horizontal se ramène à l'intégration de ce système. On en déduit alors la vitesse $\vec{V}$, la pression P et la densité ρ en chaque point (x, z) et à chaque instant t . Pour déterminer les quatre grandeurs qui définissent l'écoulement, il faut tenir compte non seulement du système d'équations aux dérivées partielles mais aussi des conditions initiales et des conditions aux limites.

I-3. Conditions initiales

L'état initial qui nous a été donné, est déterminé par la donnée du champ des vitesses, de la densité et de la pression.

Comme nous le verrons plus loin, cette hypothèse simplifie beaucoup l'approche du problème en évitant d'avoir des conditions aux limites sous forme d'équations aux dérivées partielles.

Dans les problèmes de météorologie, il n'est pas possible de supposer connues la vitesse, la densité et la pression sur l'obstacle, car cela nécessiterait l'emplacement de nombreuses stations météorologiques.

La présence de l'obstacle ne modifie pas l'équation de conservation de la masse, ni celle de l'énergie ; par contre l'équation de conservation de la quantité de mouvement est modifiée.

En effet, au voisinage de la montagne, le mouvement du fluide est tangentiel. Si on remarque que $V_N = 0$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée sur la tangente $\vec{MT}$ et sur la normale $\vec{MN}$ donne :

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} + V_T \frac{\partial V_T}{\partial s} = g_T - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} \quad (I. 8)$$

$$\frac{\partial V_N}{\partial t} + V_T \frac{\partial V_N}{\partial s} = \frac{V_T^2}{\mathcal{R}_c} = g_N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} + R \quad (I. 9)$$

V_T est la vitesse tangentielle

V_N est la vitesse normale

R est la réaction de la montagne portée par la normale en M, car il n'y a pas de frottement

$\mathcal{R}_c$ est le rayon de courbure en M

$$g_T = g \cos (\vec{g}, \vec{MT}) = -g \sin \theta$$

$$(\vec{g}, \vec{MT}) = (\vec{g}, \vec{0x}) + (\vec{0x}, \vec{MT}) = \frac{\pi}{2} + \theta$$

Puisque $V_N = 0$ sur l'obstacle, on a $u = V_T \cos \theta$ et $w = V_T \sin \theta$. Sur l'obstacle, nous avons à résoudre les quatre équations suivantes :

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + g \sin \theta = 0$$

$$u = V \cos \theta \quad \text{et} \quad w = V \sin \theta$$

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + w \frac{\partial P}{\partial z} + \gamma P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

Connaissant la vitesse tangentielle, la pression et la densité, l'équation (I.9) permet de calculer la réaction de la montagne.

Pour $|x| \rightarrow \infty$ et $z \rightarrow \infty$ on doit avoir

$$w(x, z, t) = 0$$

$$u(x, z, t) = U_\infty$$

$$P(x, z, t) = \rho_0 \frac{g}{s} e^{-sz}$$

$$\rho(x, z, t) = \rho_0 e^{-sz}$$

I-5. Equations sans dimensions

Nous venons de voir que dans un repère orthonormé $0x_1 z_1 t_1$ les équations qui régissent l'écoulement sont :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + w_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial z_1} + \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right) = 0 \quad (\text{I. 10})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{I. 11})$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z_1} + g = 0 \quad (\text{I. 12})$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + w_1 \frac{\partial P_1}{\partial z_1} + \gamma P_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right) = 0 \quad (\text{I. 13})$$

Dans ces équations $x_1, z_1, t_1, u_1, w_1, \rho_1, P_1$ sont exprimés en unités d'un système cohérent d'unités. Il est souvent plus commode d'utiliser des variables sans dimension.

Prenons une longueur caractéristique de la montagne, par exemple la hauteur, a , et un écoulement de référence caractérisé par des grandeurs constantes $\bar{u}, \bar{P}, \bar{\rho}$.

Effectuons le changement de variable :

$$\frac{x_1}{a} = x \quad \frac{\rho_1}{\bar{\rho}} = \rho \quad \frac{u_1}{\bar{u}} = u \quad \frac{t_1}{\frac{a}{\bar{u}}} = t$$

$$\frac{z_1}{a} = z \quad \frac{P_1}{\bar{P}} = P \quad \frac{w_1}{\bar{w}} = w$$

x, z, ρ, P, u, w, t sont des variables sans dimension.

Introduisons les nouvelles variables dans les équations (I. 10), (I. 11), (I. 12), (I. 13).

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = \frac{\partial (u \ddot{u})}{\partial (a \frac{t}{\ddot{u}})} = \frac{\ddot{u}^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \ddot{u} u \frac{\partial (\ddot{u} u)}{\partial (x a)} = \frac{\ddot{u}^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\bar{\rho} \rho} \frac{\partial (P \bar{P})}{\partial (x a)} = \frac{1}{\rho} \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial x}$$

L'équation (L 10) devient :

$$\frac{\ddot{u}^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\ddot{u}^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\ddot{u}^2}{a} w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho} \ddot{u}^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Le nouveau système d'équations adimensionnelles s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho} \ddot{u}^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho} \ddot{u}^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{g a}{\ddot{u}^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + w \frac{\partial P}{\partial z} + \gamma P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

Les quantités $\bar{E} = \frac{\bar{P}}{\bar{\rho} \ddot{u}^2}$ et $F = \frac{g a}{\ddot{u}^2}$ sont des nombres sans dimensions.

Ils sont indépendants des unités choisies. F caractérise les écoulements à surface libre.

Le système précédent prend une forme simple que nous présentons sous une écriture matricielle.

$$U_t + A U_x + B U_z + C = 0$$

$$U_x \equiv \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U_z \equiv \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$U_t \equiv \frac{\partial U}{\partial t}$$

U est un vecteur colonne

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ w \\ P \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma P & 0 & u \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} w & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma P & w \end{pmatrix}$$

Effectuons le même changement de variables sur les conditions aux limites :

$$\frac{\partial V_1}{\partial t_1} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial s_1} + g \sin \theta = 0$$

$$\frac{s_1}{a} = 1 \quad \frac{V_1}{\bar{u}} = V$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t_1} = \frac{\partial (V \bar{u})}{\partial (a \frac{t}{\bar{u}})} = \frac{\bar{u}^2}{a} \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial s_1} = \bar{u} V \frac{\partial (\bar{u} V)}{\partial (sa)} = \frac{\bar{u}^2}{a} V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\frac{1}{s_1} \frac{\partial P_1}{\partial s_1} = \frac{1}{\bar{\rho} \rho} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}^2 P)}{\partial (sa)} = \frac{\bar{u}^2}{a} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} = -F \sin \theta$$

Pour les conditions aux limites à l'infini, on a :

$$- |x_1| \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad z_1 \rightarrow \infty$$

$$w(x, z, t) = 0$$

$$u(x, z, t) = \frac{U_\infty}{\bar{u}}$$

II - PRESENTATION DU SCHEMA AUX DIFFERENCES FINIES

Il s'agit d'étudier une solution approchée du système (II. 1) par la méthode des différences finies

$$U_t + A U_x + B U_z = C = 0 \quad (\text{II. 1})$$

L'étude de ce système présente un caractère général, on le rencontre souvent dans l'étude des phénomènes non-permanents en physique (mécanique des fluides, acoustique, électromagnétisme).

II-1. Définition du maillage

Le domaine d'étude de la perturbation atmosphérique est défini

$$x \in [-X, X] \quad \text{et} \quad z \in [z_c, Z]$$

$$\text{où} \quad z_c = B \exp \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z_c^2}{b^2} \right)$$

X et Z sont choisis suffisamment grands pour que sur les droites d'équations $x = \pm X$ et $z = Z$ les différentes grandeurs (u, w, ρ, P) ne varient pas avec le temps.

$$\left. \begin{aligned} \rho(\pm X, z, t) &= \rho_0 e^{-sz} \\ P(\pm X, z, t) &= P_0 e^{-sz} \\ u(\pm X, z, t) &= U_\infty \\ w(\pm X, z, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall z, t$$

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, Z, t) &= \rho_0 e^{-sZ} \\ P(x, Z, t) &= P_0 e^{-sZ} \\ u(x, Z, t) &= U_\infty \\ w(x, Z, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall x, t$$

Le profil de la montagne est approché par une suite de cordes

$$[(x_{k-1}, z_{j-1}) ; (x_k, z_j)]$$

La cote z_j étant fixée, on calcule les abscisses x_k correspondantes par

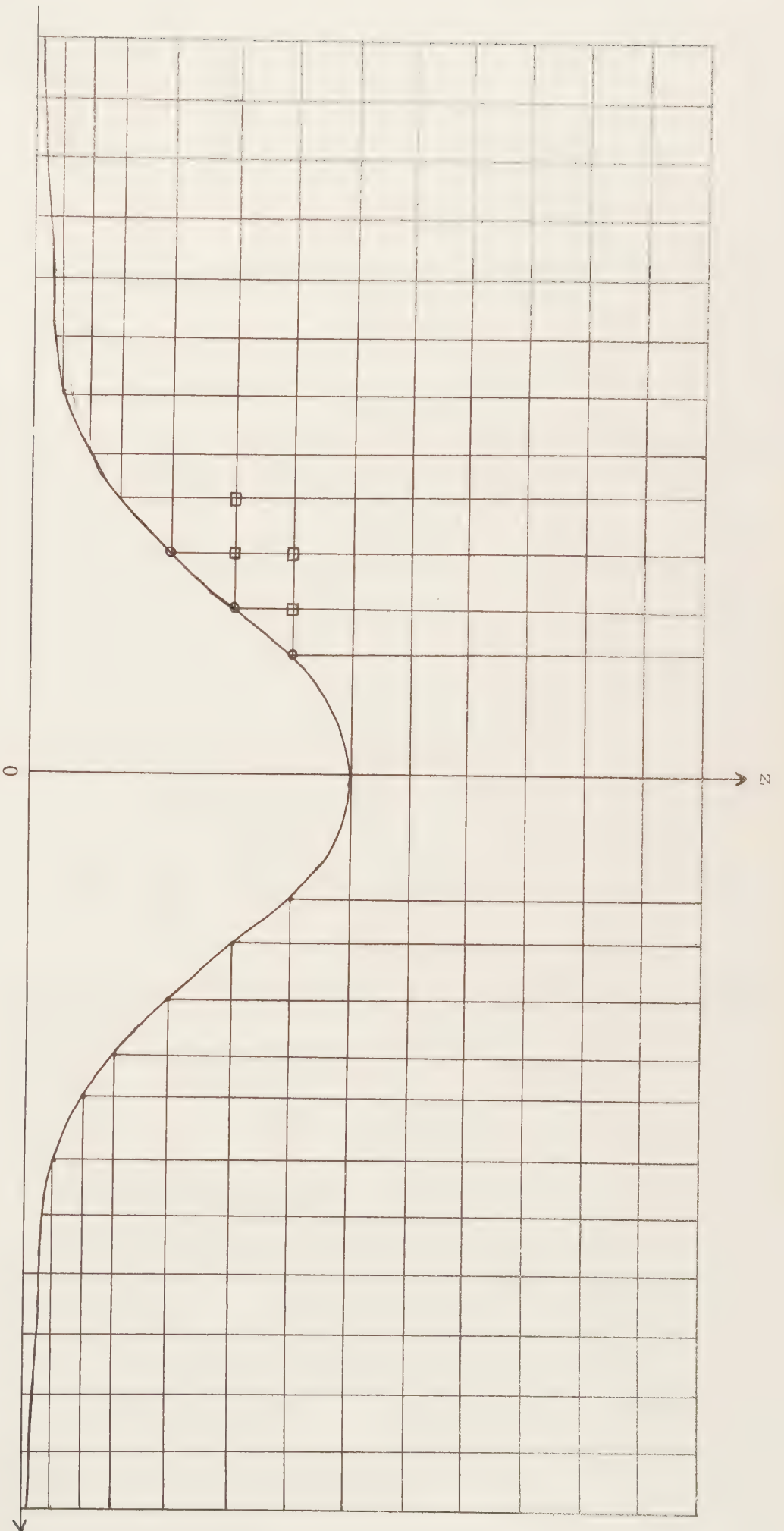
$$x_k = \pm a \sqrt{1 - \frac{z_j^2}{b^2} - \text{Log} \left(\frac{z_j}{B} \right)}$$

A l'extérieur de la largeur utile de la montagne et au delà du sommet, le partage est régulier. Nous avons ainsi découpé le domaine $[-X, X] \times [z_c, Z]$ en un réseau à mailles rectangulaires pour éviter les problèmes d'extrapolation au contour (fig. 1). Ce maillage présente les inconvénients suivants :

- au voisinage du sommet les mailles sont trop larges, Δ_x est grand par rapport à Δ_x maximum.
- au voisinage du sol, Δ_z est petit par rapport à Δ_z minimum car il faut suivre le profil de la montagne pour éviter les points de discontinuité.

- points réguliers
○ points irréguliers

Fig. 1



Un point du réseau est repéré par ses coordonnées (x_k, z_j, t_n) avec

$$k \in (1, K) , \quad j \in (1, J) \quad \text{et} \quad t \in (0, N)$$

on distingue deux classes de points dans le maillage :

- les points réguliers : ce sont les points dont tous les voisins sont des points intérieurs ou des points du contour.
- les points irréguliers : ce sont les points du contour.

Le maillage ainsi défini est commun aux quatre fonctions inconnues

$$\rho(x_k, z_j, t_n) , \quad u(x_k, z_j, t_n) , \quad w(x_k, z_j, t_n) , \quad P(x_k, z_j, t_n) .$$

Posons

$$V_{k,j} = \begin{pmatrix} \rho_{k,j} \\ u_{k,j} \\ w_{k,j} \\ P_{k,j} \end{pmatrix}$$

$$V^t = (\rho_{11} \ u_{11} \ w_{11} \ P_{11} \ \rho_{12} \ u_{12} \ w_{12} \ P_{12} \ \rho_{13} \ u_{13} \ w_{13} \ P_{13} \ \dots \ \rho_{K1} \ u_{K1} \ w_{K1} \ P_{K1} \dots)$$

V est une approximation de U en tous les points du réseau.

II-2. Approximations des dérivées d'espace

Une première méthode d'approximation du système (II.1) consiste à discrétiser seulement les variables d'espace sans modifier les dérivées par rapport au temps. On associe donc au système (II.1) un système différentiel ordinaire

$$\frac{dV}{dt} = G(V) \cdot V + E$$

auquel il faut adjoindre les conditions initiales.

V est un vecteur colonne dont les éléments sont les inconnues $u_{k,j}$

$w_{k,j}$, $\rho_{k,j}$, $P_{k,j}$ en tous les points du réseau.

G(V) est une matrice dont les éléments sont fonction de $u_{k,j}$, $w_{k,j}$, $\rho_{k,j}$ et $P_{k,j}$.

Sur le plan numérique on est ramené à l'intégration d'un grand système différentiel ordinaire.

II-2.1. Points irréguliers

Nous distinguons deux catégories de points selon que l'on se trouve sur le côté gauche ou sur le côté droit de la montagne. Dans chacun des deux cas, l'approximation des dérivées d'espace est imposée par la géométrie du maillage.

Par exemple, sur le côté gauche, on ne peut remplacer $\frac{\partial F}{\partial x}$ par

$(F_{k+1,j}^n - F_{k,j}^n)/(x_{k+1} - x_k)$, car $F_{k+1,j}^n$ est évalué en un point qui se trouve

à l'intérieur de la montagne et de ce fait il n'est pas défini.

Sur la montagne, les conditions aux limites sont :

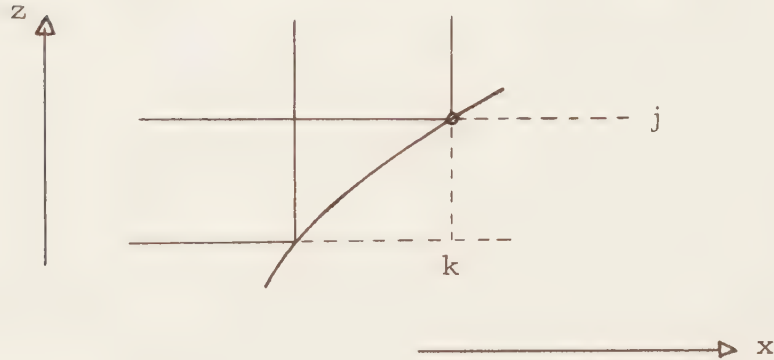
$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + F \sin \theta = 0 \quad (\text{II. 2})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{II. 3})$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + w \frac{\partial P}{\partial z} + \gamma P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{II. 4})$$

V est la vitesse tangentielle. On a $u = V \cos \theta$ et $w = V \sin \theta$.

II-2.1.1. Côté gauche de la montagne



Les dérivées d'espace sont approchées par :

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{F(s) - F(s - \Delta s)}{\Delta s} = \frac{F_{k,j}^n - F_{k-1,j-1}}{\Delta s}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F(x_k, z_j) - F(x_{k-1}, z_j)}{x_k - x_{k-1}} = \frac{F_{k,j} - F_{k-1,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{F(x_k, z_{j+1}) - F(x_k, z_j)}{z_{j+1} - z_j} = \frac{F_{k,j+1} - F_{k,j}}{\Delta z}$$

L'équation (II, 2) donne

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} + V_{k,j} \frac{V_{k,j} - V_{k-1,j-1}}{\Delta s} + \frac{1}{\rho_{k,j}} \frac{P_{k,j} - P_{k-1,j-1}}{\Delta s} + F \sin \theta_{k,j} = 0$$

d'où

$$\frac{du_{k,j}}{dt} = - \frac{u_{k,j}}{\Delta s} \left(\frac{u_{k,j}}{\cos \theta_{k,j}} - \frac{u_{k-1,j-1}}{\cos \theta_{k-1,j-1}} \right) - \frac{\cos \theta_{k,j}}{\rho_{k,j}} \cdot \frac{1}{\Delta s} (P_{k,j} - P_{k-1,j-1})$$

$$- F \sin \theta_{k,j} \cos \theta_{k,j}$$

$$\frac{dw_{k,j}}{dt} = -\frac{w_{k,j}}{\Delta s} \left(\frac{w_{k,j}}{\sin\theta_{k,j}} - \frac{w_{k-1,j-1}}{\sin\theta_{k-1,j-1}} \right) - \frac{\sin\theta_{k,j}}{\rho_{k,j}} \frac{1}{\Delta s} (P_{k,j} - P_{k-1,j-1}) - F \sin^2 \theta_{k,j}$$

Les équations (II.3) et (II.4) sont approchées par :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{k,j}}{dt} = & -\frac{u_{k,j}}{\Delta x} (\rho_{k,j} - \rho_{k-1,j}) - \frac{w_{k,j}}{\Delta z} (\rho_{k,j+1} - \rho_{k,j}) \\ & - \rho_{k,j} \left(\frac{u_{k,j} - u_{k-1,j}}{\Delta x} + \frac{w_{k,j+1} - w_{k,j}}{\Delta z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{k,j}}{dt} = & -\frac{u_{k,j}}{\Delta x} (P_{k,j} - P_{k-1,j}) - \frac{w_{k,j}}{\Delta z} (P_{k,j+1} - P_{k,j}) \\ & - \gamma P_{k,j} \left(\frac{u_{k,j} - u_{k-1,j}}{\Delta x} + \frac{w_{k,j+1} - w_{k,j}}{\Delta z} \right) \end{aligned}$$

Nous venons de former quatre lignes de la matrice G

Ecrivons ceci sous forme matricielle

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} = A' V_{k,j} + B' V_{k-1,j} + C' V_{k,j+1} + D' V_{k-1,j-1}$$

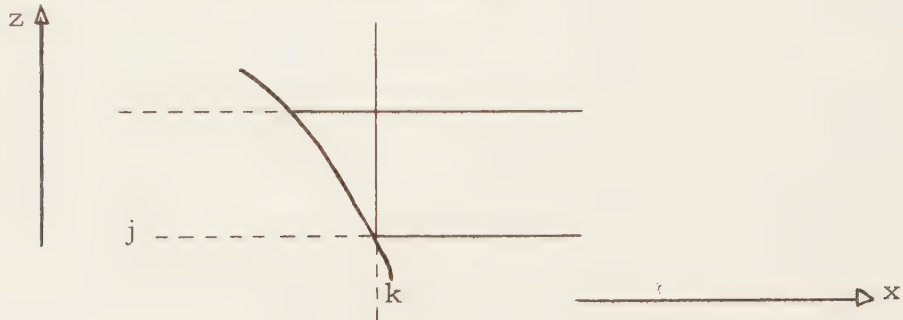
$$A' = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} & -\frac{\rho}{\Delta x} & \frac{\rho}{\Delta z} & 0 \\ 0 & -\frac{V}{\Delta s} & 0 & -\frac{\cos\theta}{\rho \Delta s} \\ 0 & 0 & -\frac{V}{\Delta s} & -\frac{\sin\theta}{\rho \Delta s} \\ 0 & -\frac{\gamma P}{\Delta x} & \frac{\gamma P}{\Delta z} & -\frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{u}{\Delta x} & \frac{\rho}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma P}{\Delta x} & 0 & \frac{u}{\Delta x} \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} -\frac{w}{\Delta z} & 0 & -\frac{\rho}{\Delta z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma P}{\Delta z} & -\frac{w}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{\Delta s \cos\theta} & 0 & \frac{\cos\theta}{\rho \Delta s} \\ 0 & 0 & \frac{w}{\Delta s \sin\theta} & \frac{\sin\theta}{\rho \Delta s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II-2.1.2. Côté droit de la montagne



Les dérivées d'espace sont approchées par :

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{F(s) - F(s - \Delta s)}{\Delta s} = \frac{F_{k,j} - F_{k-1,j-1}}{\Delta s}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F(x_{k+1}, z_j) - F(x_k, z_j)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{F_{k+1,j} - F_{k,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{F(x_k, z_{j+1}) - F(x_k, z_j)}{z_{j+1} - z_j} = \frac{F_{k,j+1} - F_{k,j}}{\Delta z}$$

Par un calcul analogue à celui effectué pour le côté gauche, les conditions aux limites sont approchées par :

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} = A'' V_{k,j} + B'' V_{k+1,j} + C'' V_{k,j+1} + D'' V_{k-1,j-1}$$

$$\begin{aligned}
 A'' &= \begin{pmatrix} \frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} & \frac{\rho}{\Delta x} & \frac{\rho}{\Delta z} & 0 \\ 0 & -\frac{V}{\Delta s} & 0 & -\frac{\cos \theta}{\rho \Delta s} \\ 0 & 0 & -\frac{V}{\Delta s} & -\frac{\sin \theta}{\rho \Delta s} \\ 0 & \frac{\gamma P}{\Delta x} & \frac{\gamma P}{\Delta z} & \frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} \end{pmatrix} & B'' &= \begin{pmatrix} -\frac{u}{\Delta x} & -\frac{\rho}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma P}{\Delta x} & 0 & -\frac{u}{\Delta x} \end{pmatrix} \\
 C'' &= \begin{pmatrix} -\frac{w}{\Delta z} & 0 & -\rho / \Delta z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma P}{\Delta z} & -\frac{w}{\Delta z} \end{pmatrix} & D'' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{\Delta s \cos \theta}, & 0 & \frac{\cos \theta}{\rho \Delta s} \\ 0 & 0 & \frac{w}{\Delta s \sin \theta}, & \frac{\sin \theta}{\rho \Delta s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

II-2.2. Points réguliers

Les dérivées d'espace sont remplacées par leur expression en fonction des différences finies. Dans l'étude des points réguliers, il y a deux approximations possibles suivant que l'on fait intervenir le point "en avant" ou le point "en arrière".

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} + A_{k,j} \frac{V_{k+1,j} - V_{k,j}}{\Delta x} + B_{k,j} \frac{V_{k,j+1} - V_{k,j}}{\Delta z} + C = 0$$

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} = \left(\frac{1}{\Delta x} A_{k,j} + \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} \right) V_{k,j} - \frac{1}{\Delta x} A_{k,j} V_{k+1,j} - \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} V_{k,j+1} - C$$

Nous venons de former quatre lignes de la matrice G

0	$\frac{1}{\Delta x} A + \frac{1}{\Delta z} B$	$-\frac{1}{\Delta z} B$	0	$-\frac{1}{\Delta x} A$	0
---	---	-------------------------	---	-------------------------	---

L'élément diagonal de G est $\left(\frac{1}{\Delta x} A + \frac{1}{\Delta z} B \right)$

$$\frac{1}{\Delta x} A + \frac{1}{\Delta z} B = \begin{pmatrix} \frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} & \frac{\rho}{\Delta x} & \frac{\rho}{\Delta z} & 0 \\ 0 & \frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} & 0 & \frac{1}{\rho \Delta x} \\ 0 & 0 & \frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} & \frac{1}{\rho \Delta z} \\ 0 & \frac{\gamma P}{\Delta x} & \frac{\gamma P}{\Delta z} & \frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

Si u, w, ρ, P sont connues sur le contour, la matrice G prend la forme d'une matrice triangulaire dont la partie inférieure est composée de zéros. Dans le cas que nous traitons, la discrétisation aux points situés sur le contour perturbe la forme triangulaire de G .

Système différentiel ordinaire du 1^e type

[illegible]

II-2.2.2. Schéma du 2e type

Les dérivées d'espace sont approchées par :

$$\frac{\partial F(x_k, z_j, t)}{\partial x} = \frac{F(x_k, z_j, t) - F(x_{k-1}, z_j, t)}{x_k - x_{k-1}} = \frac{F_{k,j} - F_{k-1,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial F(x_k, z_j, t)}{\partial z} = \frac{F(x_k, z_j, t) - F(x_k, z_{j-1}, t)}{z_j - z_{j-1}} = \frac{F_{k,j} - F_{k,j-1}}{\Delta z}$$

Le système différentiel ordinaire approchant le système aux dérivées partielles au point (x_k, z_j) est :

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} + A_{k,j} \frac{V_{k,j} - V_{k-1,j}}{\Delta x} + B_{k,j} \frac{V_{k,j} - V_{k,j-1}}{\Delta z} + C = 0$$

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} = \left(-\frac{1}{\Delta x} A_{k,j} - \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} \right) V_{k,j} + \frac{1}{\Delta x} A_{k,j} V_{k-1,j} + \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} V_{k,j-1} - C$$

Nous venons de former quatre lignes de la matrice G

0	$\frac{1}{\Delta x} A$	0	$\frac{1}{\Delta z} B$	$-\frac{1}{\Delta x} A - \frac{1}{\Delta z} B$	0
---	------------------------	---	------------------------	--	---

Si on ne tient pas compte des conditions aux limites, la matrice G prend une forme triangulaire dont la partie située au dessus de la diagonale principale est composée de zéros.

$\left(-\frac{1}{\Delta x} A - \frac{1}{\Delta z} B \right)$ est l'élément diagonal de G

$$-\frac{1}{\Delta x} A - \frac{1}{\Delta z} B = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\Delta x} - \frac{w}{\Delta z} & -\frac{\rho}{\Delta x} & -\frac{\rho}{\Delta z} & 0 \\ 0 & -\frac{u}{\Delta x} - \frac{w}{\Delta z} & 0 & \frac{1}{\rho \Delta x} \\ 0 & 0 & -\frac{u}{\Delta x} - \frac{w}{\Delta z} & \frac{1}{\rho \Delta z} \\ 0 & -\frac{\gamma P}{\Delta x} & -\frac{\gamma P}{\Delta z} & -\frac{u}{\Delta x} - \frac{w}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

II-2.2.3. Schéma du 3e type

Les dérivées d'espace sont approchées par :

$$\frac{\partial F(x_k, z_j, t)}{\partial x} = \frac{F(x_k, z_j, t) - F(x_{k-1}, z_j, t)}{x_k - x_{k-1}} = \frac{F_{k,j} - F_{k-1,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial F(x_k, z_j, t)}{\partial z} = \frac{F(x_k, z_{j+1}, t) - F(x_k, z_j, t)}{z_{j+1} - z_j} = \frac{F_{k,j+1} - F_{k,j}}{\Delta z}$$

Le système différentiel ordinaire approchant le système aux dérivées partielles au point (x_k, z_j) est :

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} + A_{k,j} \frac{V_{k,j} - V_{k-1,j}}{\Delta x} + B_{k,j} \frac{V_{k,j+1} - V_{k,j}}{\Delta z} + C = 0$$

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} = \left(-\frac{1}{\Delta x} A_{k,j} + \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} \right) V_{k,j} + \frac{1}{\Delta x} A_{k,j} V_{k-1,j} - \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} V_{k,j+1} - C$$

Nous obtenons ainsi quatre lignes de G.

0	$\frac{1}{\Delta x} A$	0	$-\frac{1}{\Delta x} A + \frac{1}{\Delta z} B$	$-\frac{1}{\Delta z} B$	0
---	------------------------	---	--	-------------------------	---

La matrice G prend une forme tridiagonale, l'une des diagonales est située immédiatement au-dessus de la diagonale principale.

$\left(-\frac{1}{\Delta x} A + \frac{1}{\Delta z} B\right)$ est l'élément diagonal de G.

$$-\frac{1}{\Delta x} A + \frac{1}{\Delta z} B = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} & -\frac{\rho}{\Delta x} & \frac{\rho}{\Delta z} & 0 \\ 0 & -\frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} & 0 & \frac{1}{\rho \Delta x} \\ 0 & 0 & -\frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} & \frac{1}{\rho \Delta z} \\ 0 & -\frac{\gamma P}{\Delta x} & \frac{\gamma P}{\Delta z} & -\frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

II-2.2.4. Schéma du 4e type

Les dérivées d'espace sont approchées par :

$$\frac{\partial F(x_k, z_j, t)}{\partial x} = \frac{F(x_{k+1}, z_j, t) - F(x_k, z_j, t)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{F_{k+1,j} - F_{k,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial F(x_k, z_j, t)}{\partial z} = \frac{F(x_k, z_j, t) - F(x_k, z_{j-1}, t)}{z_j - z_{j-1}} = \frac{F(x_k, z_j, t) - F(x_k, z_{j-1}, t)}{\Delta z}$$

Le système différentiel ordinaire approchant le système aux dérivées partielles au point (x_k, z_j) est :

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} + A_{k,j} \frac{V_{k+1,j} - V_{k,j}}{\Delta x} + B_{k,j} \frac{V_{k,j} - V_{k,j-1}}{\Delta z} + C = 0$$

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} = \left(\frac{1}{\Delta x} A_{k,j} - \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} \right) V_{k,j} - \frac{1}{\Delta x} A_{k,j} V_{k+1,j} + \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} V_{k,j-1} - C$$

Nous obtenons quatre lignes de la matrice G.

0	$\frac{1}{\Delta z} B$	$\frac{1}{\Delta x} A - \frac{1}{\Delta z} B$	0	$-\frac{1}{\Delta x} A$	0
---	------------------------	---	---	-------------------------	---

La matrice G prend une forme tridiagonale, l'une des diagonales est située immédiatement au-dessus de la diagonale principale.

$\left(\frac{1}{\Delta x} A - \frac{1}{\Delta z} B \right)$ est l'élément diagonal de G.

$$\frac{1}{\Delta x} A - \frac{1}{\Delta z} B = \begin{pmatrix} \frac{u}{\Delta x} - \frac{w}{\Delta z} & \frac{\rho}{\Delta x} & -\frac{\rho}{\Delta z} & 0 \\ 0 & \frac{u}{\Delta x} - \frac{w}{\Delta z} & 0 & \frac{1}{\rho \Delta x} \\ 0 & 0 & \frac{u}{\Delta x} - \frac{w}{\Delta z} & -\frac{1}{\rho \Delta z} \\ 0 & \frac{\gamma P}{\Delta x} & -\frac{\gamma P}{\Delta z} & \frac{u}{\Delta x} - \frac{w}{\Delta z} \end{pmatrix}$$

Nous venons de voir qu'en un point $(k \Delta x, j \Delta z)$, il existe quatre schémas possible. Il faut noter que l'on sera amené, selon les signes de u et de w , à choisir en chaque point régulier un et un seul des schémas décrits. La matrice $G(V)$ aura donc des groupes de lignes des quatre types précédents.

II-3. Essais expérimentaux

La discrétisation en x et en z ramène la recherche d'une solution de Navier-Stokes à l'intégration numérique d'un des systèmes différentiels ordinaires précédents.

$$\frac{dV}{dt} = G(V) \cdot V + E \quad (\text{II. 5})$$

$$V(0) = U_0$$

Il existe plusieurs méthodes pour approcher la solution du système (II. 5). Les méthodes de différences finies de type implicite sont à rejeter car elles aboutissent à la recherche d'une solution d'un système d'équations non linéaires de grandes dimensions, dont la résolution se fait généralement par itération et pose un problème de convergence. Nous choisissons les méthodes de différences finies explicites pour leur simplicité. Les valeurs inconnues se déduisent immédiatement des valeurs connues.

$$\text{Posons} \quad V_{k,j}^n = \begin{pmatrix} \rho_{k,j}^n \\ u_{k,j}^n \\ w_{k,j}^n \\ P_{k,j}^n \end{pmatrix}$$

Considérons le schéma du 1^e type :

$$\frac{dV_{k,j}}{dt} = \left(\frac{1}{\Delta x} A_{k,j} + \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} \right) V_{k,j} - \frac{1}{\Delta x} A_{k,j} V_{k+1,j} - \frac{1}{\Delta z} B_{k,j} V_{k,j+1} - C$$

$$\text{On remplace} \quad \frac{dV_{k,j}}{dt} \quad \text{par} \quad \frac{V_{k,j}^{n+1} - V_{k,j}^n}{\Delta t}$$

$$\text{d'où} \quad V_{k,j}^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n \right) V_{k,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n V_{k+1,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n V_{k,j+1}^n - \Delta t C$$

La méthode des différences finies explicite conduit au système suivant :

$$V^{n+1} = (I + \Delta t G) V^n - \Delta t C = H V^n - \Delta t C \quad (\text{II. 6})$$

H est la matrice de transfert qui fait passer de la fonction-vecteur V^n calculée à l'instant t_n , à la fonction vecteur V^{n+1} calculée à l'instant t_{n+1} .

Les essais sur calculatrice ont été faits avec les valeurs suivantes :

$$400 \text{ m} \leq \frac{\Delta x}{\Delta z} \leq 550 \text{ m}$$

$$a = 1500 \text{ m}$$

$$b = 6300 \text{ m}$$

$$B = 810 \text{ m}$$

$$U_{\infty} = 6 \text{ m/s}$$

La hauteur de la montagne au sommet est de 2000 m.

Certaines difficultés sont apparues sur le plan numérique dans l'approche des dérivées d'espace, en particulier dans le calcul de $\frac{\partial P}{\partial z}$.

En effet, à l'instant initial $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g = 0$. Cette expression, après discrétisation de $\frac{\partial P}{\partial z}$ donne environ 10^{-5} au lieu de la valeur zéro.

Pour remédier à cela, on prend comme nouvelle variable $P'(x, z, t)$.

$$P'(x, z, t) = P(x, z, t) - P(x, z, 0)$$

$$\text{avec} \quad P'(x, z, 0) = 0 \quad P(x, z, 0) = \rho_0 \frac{g}{s} e^{-sz}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x, z, 0)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z} + g = \left(-\frac{1}{\rho} g e^{-sz} + g \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z}$$

Ainsi, nous avons évité l'approximation de zéro sur le plan numérique.

Les essais effectués avec différentes valeurs de Δt et même avec Δt petit (2s, 1s, 0.5s) ont montré qu'il y a instabilité. Ceci prouve que le choix de Δt est fonction de Δx , Δz et des valeurs de V^n à l'instant t_n .

Il ressort de ces résultats qu'une étude théorique de la stabilité s'impose pour la détermination de Δt .

La seconde partie de ce travail est consacrée à cette étude et à la détermination pratique de Δt en vue de la résolution du problème posé.

Matrice de transfert H

Matrice de transfert H

0	$I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A + \frac{\Delta t}{\Delta z} B$	$-\frac{\Delta t}{\Delta z} B$	0	$-\frac{\Delta t}{\Delta x} A$	0			
0	$\frac{\Delta t}{\Delta z} B$	$I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A - \frac{\Delta t}{\Delta z} B$	0	$-\frac{\Delta t}{\Delta x} A$	0			
0	$\Delta t D'$	$\Delta t B'$	0	$I + \Delta t A'$	$\Delta t C'$			
0	$\frac{\Delta t}{\Delta x} A$	0	$I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A + \frac{\Delta t}{\Delta z} B$	$-\frac{\Delta t}{\Delta z} B$	0			
		$\Delta t D'$	0	$I + \Delta t A''$	$\Delta t C''$	0	$\Delta t B''$	0
0	$\frac{\Delta t}{\Delta x} A$	0	$\frac{\Delta t}{\Delta z} B$	$I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A + \frac{\Delta t}{\Delta z} B$	0			

2ème Partie

THEORIE ET APPLICATIONS DE LA STABILITE
AU PROBLEME DE PERTURBATION DE RELIEF

La méthode des différences finies a été appliquée aux équations aux dérivées partielles depuis longtemps.

Pour les problèmes où une analyse mathématique rigoureuse est actuellement impossible, le calcul de la solution par la méthode des différences est très appréciée. Cette méthode donne une idée du phénomène étudié, mais pas de résultats très précis. En plus, les résultats ne sont valables que si la méthode est stable.

Chez les auteurs qui ont étudié les problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, la stabilité pratique des schémas des différences finies proposés n'est pas souvent établie d'une manière rigoureuse.

RICHTMYER, par exemple, suppose que la stabilité d'un tel problème dépend des variations des termes du premier ordre.

Il remplace le système aux différences finies non-linéaire par un système linéaire en posant :

$$U^n(x, z) = U(x, z, n \Delta t) + \mathcal{E}^n(x, z)$$

où $\mathcal{E}^n(x, z)$ est petit devant $U(x, z, n \Delta t)$.

Il en résulte un système linéaire à coefficient constant dont les inconnues sont les $\mathcal{E}^n(x, z)$. Pour résoudre ce système, il suppose que

$$\mathcal{E}^n(x, z) = a^n e^{i(k_1 \alpha \Delta x + k_2 \beta \Delta z)} \quad i^2 = -1$$

Cette étude conduit à la recherche des valeurs propres de la matrice d'amplification, matrice qui fait passer de l'étape $n \Delta t$ à l'étape $(n+1) \Delta t$; or cette opération est délicate sur le plan numérique.

De plus, la méthode de RICHTMYER est empirique et n'est pas toujours satisfaisante car elle néglige les effets de la non-linéarité qui peuvent devenir importants.

Nous sommes donc amenés à chercher un autre critère pratique de stabilité.

I - ETUDE THEORIQUE DE LA STABILITE

I-1. Définition de la stabilité

On considère le système suivant :

$$U_t + A U_x + B U_z = 0 \quad (I. 1)$$

U est un vecteur colonne, dont les éléments sont les fonctions inconnues.
 A, B sont deux matrices qui dépendent de U, x, z, t .

La résolution d'un tel système par la méthode des différences finies explicite conduit au système suivant

$$V(t + \Delta t) = H(V, \Delta t, \Delta x, \Delta z) V(t) \quad (I. 2)$$

où V est une approximation de U en tous les points du réseau.

H est la matrice de "transfert"

Δt le pas dans le temps

Δx et Δz respectivement le pas suivant x et z .

Définition : Le schéma de différences finies (I. 2) approche le système différentiel (I. 1) à l'ordre m si pour toutes les fonctions continues on a :

$$\| U(t + \Delta t) - H \cdot U(t) \| \leq O(\Delta t^{m+1}) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T$$

c'est à dire, si après un pas dans le temps Δt , la solution exacte et la solution approchée diffèrent seulement de $O(\Delta t^{m+1})$.

Pour que l'approximation soit vraiment d'ordre m , il faut en plus que l'approximation des conditions aux limites soit du même ordre.

Dans les exemples que nous traiterons plus loin, nous prendrons soit $m = 1$, soit $m = 2$.

Définition de la stabilité : le système (I.2) est stable, si l'amplitude d'une petite perturbation quelconque introduite sur un intervalle fixé (t_0, t_0+T) ne croît pas avec le temps lorsque $\Delta t, \Delta x, \Delta z$ tendent vers zéro.

Plus précisément, partageons T en n intervalles égaux Δt . Désignons par $\mathcal{E}^0$ la perturbation initiale et $\mathcal{E}^n$ la perturbation après n pas dans le temps.

Nous dirons que le système (I.2) est stable s'il existe une constante C_1 telle que :

$$\| \mathcal{E}^n \| \leq C_1 \| \mathcal{E}^0 \| \quad \text{lorsque } \Delta t \rightarrow 0 \text{ avec } n\Delta t = T$$

Nous supposerons de plus que T est assez petit pour que l'on puisse, dans l'étude de la propagation de la perturbation, négliger les variations de t et V et remplacer H par une matrice à coefficients constants.

I-2. Condition nécessaire de stabilité locale de Von-Neumann

Une condition nécessaire de stabilité locale en t_0 est qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un nombre K tel que :

$$| \lambda_i | \leq 1 + K\Delta t \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 < \Delta t < \varepsilon \\ 0 < n\Delta t \leq T \\ i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

λ_i étant les valeurs propres de H .

Soit e_i le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i .

Etudions la propagation d'une perturbation quelconque $\mathcal{E}$.

On sait que toute perturbation peut se mettre sous la forme $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^m a_i e_i$ en considérant la base engendrée par les vecteurs propres de H .

Il suffit donc de faire l'étude sur le vecteur propre e_i . Choisissons alors comme perturbation initiale $\mathcal{E}^0 = e_i$. Effectuons n pas dans le temps.

$$\mathcal{E}^1 = H \mathcal{E}^0 = H e_i = \lambda_i e_i$$

$$\mathcal{E}^2 = H \mathcal{E}^1 = \lambda_i H e_i = \lambda_i^2 e_i$$

$$\mathcal{E}^n = \lambda_i^n e_i$$

Pour que $\mathcal{E}^n$ reste borné, il faut qu'il existe un nombre C tel que

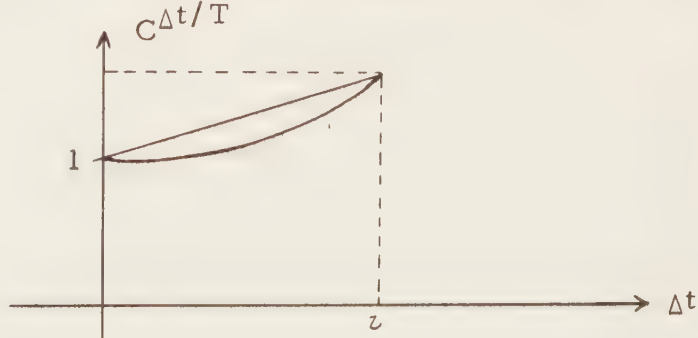
$$|\lambda_i^n| \leq C$$

$$\text{Soit } |\lambda_i| \leq C^{1/n}$$

$$\text{Comme } n \Delta t = T \quad |\lambda_i| \leq C^{\Delta t/T}$$

Or pour $\Delta t \in [0, z]$, $C^{\Delta t/T}$ est borné par $1 + K \Delta t$ (fig. 2)

Fig. 2



$$C^{\Delta t/T} \leq 1 + K \Delta t$$

$$\text{d'où } |\lambda_i| \leq 1 + K \Delta t$$

Si nous désignons par $R = \max_i |\lambda_i|$ le rayon spectral de H nous avons aussi la condition nécessaire de stabilité

$$R \leq 1 + K \Delta t$$

I-3. Condition suffisante de stabilité locale

Une condition suffisante de stabilité locale en t_0 est que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre K tel que :

$$\| H \| \leq 1 + K_{\Delta} t \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \leq \Delta t < \epsilon \\ 0 \leq n_{\Delta} t \leq T \end{cases}$$

Soit ϵ^n la perturbation après n pas dans le temps

$$\epsilon^1 = H \epsilon^0$$

$$\epsilon^2 = H \epsilon^1 = H \cdot H \epsilon^0 = H^2 \epsilon^0$$

$$\epsilon^n = H^n \epsilon^0$$

$$\| \epsilon^n \| \leq \| H^n \| \cdot \| \epsilon^0 \| \leq \| H \|^n \cdot \| \epsilon^0 \|^n$$

d'où

$$\| \epsilon^n \| \leq (1 + K_{\Delta} t)^n \| \epsilon^0 \|^n$$

$$\text{or } n_{\Delta} t = T \quad (1 + K_{\Delta} t)^n = \left(1 + \frac{KT}{n}\right)^n \leq e^{KT}$$

$$\text{donc} \quad \| \epsilon^n \| \leq e^{KT} \| \epsilon^0 \|^n$$

Si $\| H \| \leq 1 + K_{\Delta} t$ alors la perturbation est uniformément bornée.

I-4. Critère pratique de stabilité

Dans l'étude du (§ I.3) la norme de matrice n'est pas fixée. Définissons la norme de H par :

$$\| H \| = \text{Max}_i \left(\sum_{j=1}^m |h_{ij}| \right)$$

Cette norme a l'avantage d'être facile à calculer.

Une condition suffisante de stabilité locale est :

$$\left(\sum_{j=1}^m |h_{ij}| \right) \leq 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m$$

En pratique, chaque ligne de la matrice H fournit un pas Δt_ℓ de stabilité ; ce pas varie d'une ligne à l'autre.

Le système aux différences finies est stable si, et seulement si, la condition de stabilité est vérifiée en tous les points du réseau. Dans le cas contraire, des phénomènes d'instabilité se développent et croissent avec le temps aux points où la condition de stabilité n'est pas respectée.

Le rayon de stabilité cherché est donc :

$$\Delta t = \min_{\ell = 1, m} (\Delta t_\ell)$$

II - APPLICATIONS AUX SCHEMAS DE DIFFERENCES FINIES

II-1. Etude de la stabilité par la condition suffisante

Pour illustrer cette étude, nous travaillons sur le schéma du 1^{er} type.
Dans ce cas le système aux différences finies est :

$$V_{k,j}^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n \right) V_{k+1,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n V_{k+1,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n V_{k,j+1}^n - \Delta t C$$

Pour alléger l'écriture, nous supprimons les indices k, j, n dans l'étude de la stabilité.

L'application du critère pratique de stabilité aux lignes de la matrice H fournit: (les lignes sont étudiées par groupe de quatre):

$$\text{1e ligne} \quad \left| 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} |\rho| + 2 \frac{\Delta t}{\Delta z} |\rho| + \frac{\Delta t}{\Delta x} |u| + \frac{\Delta t}{\Delta z} |w| \leq 1$$

$$\text{2e ligne} \quad \left| 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{|\rho|} + \frac{\Delta t}{\Delta x} |u| + \frac{\Delta t}{\Delta z} |w| \leq 1$$

$$\text{3e ligne} \quad \left| 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + 2 \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{1}{|\rho|} + \frac{\Delta t}{\Delta x} |u| + \frac{\Delta t}{\Delta z} |w| \leq 1$$

$$\text{4e ligne} \quad \left| 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} u + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + 2 \gamma |P| \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} |u| + \frac{\Delta t}{\Delta z} |w| \leq 1$$

Pour déterminer les différents pas Δt_l , le raisonnement est fait sur la première ligne. Les résultats pour les autres lignes s'en déduisent facilement.

Considérons l'inégalité suivante :

$$\left| 1 + \Delta t \left(\frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} \right) \right| + \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2\rho}{\Delta x} + \frac{2\rho}{\Delta z} \right) \leq 1 \quad (\text{II. 1})$$

Posons $E = \varepsilon_1 \frac{|u|}{\Delta x} + \varepsilon_2 \frac{|w|}{\Delta z}$ avec $\varepsilon_1 = \begin{cases} +1 & \text{si } u > 0 \\ -1 & \text{si } u < 0 \end{cases}$

$$E = \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z}$$

$$F = \frac{2\rho}{\Delta x} + \frac{2\rho}{\Delta z}$$

$$\text{d'où} \quad |1 + \Delta t E| \leq 1 - \Delta t (E_1 + F) \quad (\text{II. 2})$$

$$(\text{II. 2}) \text{ n'a de sens que si } 1 - \Delta t (E_1 + F) > 0 \Rightarrow \Delta t < \frac{1}{E_1 + F}$$

Dans ces conditions (II. 2) est équivalente à :

$$-1 + \Delta t (E_1 + F) \leq 1 + \Delta t E \leq 1 - \Delta t (E_1 + F) \quad (\text{II. 3})$$

d'où, deux cas à distinguer :

$$\alpha) \quad 1 + \Delta t E \leq 1 - \Delta t (E_1 + F)$$

$$\Delta t (E + E_1 + F) \leq 0 \Rightarrow E_1 + E + F < 0$$

L'inégalité n'est jamais satisfaite quels que soient les signes de u et w .
En effet :

$$a) \quad u > 0, w > 0$$

$$E = \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z}$$

$$E_1 + E + F = 2 \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{\rho}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta z} \right) > 0$$

$$b) \quad u < 0, w < 0$$

$$E = - \frac{|u|}{\Delta x} - \frac{|w|}{\Delta z}$$

$$E_1 + E + F = 2 \left(\frac{\rho}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta z} \right) > 0$$

c) $u > 0, w < 0$

$$E = \frac{|u|}{\Delta x} - \frac{|w|}{\Delta z}$$

$$E_1 + E + F = 2 \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta z} \right) > 0$$

d) $u < 0, w > 0$

$$E = - \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z}$$

$$E_1 + E + F = 2 \left(\frac{|w|}{\Delta z} + \frac{\rho}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta z} \right) > 0$$

β) $-1 + \Delta t (E_1 + F) \leq 1 + \Delta t E$

$$\Delta t (E_1 + F - E) \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{2}{E_1 + F - E}$$

car $(E_1 + F - E) > 0$ quels que soient les signes de u, w .

Comme nous avons fait l'hypothèse que $\Delta t \leq \frac{1}{E_1 + F}$ il faut donc choisir le minimum de $\left(\frac{2}{E_1 + F - E}, \frac{1}{E_1 + F} \right)$

on vérifie que $\frac{1}{E_1 + F} < \frac{2}{E_1 + F - E}$ donc $\Delta t \leq \frac{1}{E_1 + F}$

Pour les trois autres inégalités, les résultats sont identiques.

Conclusion : L'application du critère pratique de la stabilité ne permet pas de montrer que le système est stable si petit que soit Δt . Nous pouvons toujours choisir Δt pour satisfaire à l'inégalité de gauche (II.3) mais il n'est pas possible de satisfaire à l'inégalité de droite. Nous essayerons de satisfaire à cette dernière "au mieux" dans le paragraphe (II.4).

Une étude analogue pour les trois autres types de schémas mène à la même conclusion que précédemment.

II-3. Amélioration de la stabilité

L'étude précédente n'a pas permis de montrer la stabilité des différents schémas étudiés. Nous nous proposons de rendre stable ces schémas.

On suppose que l'on connaît $U(x, z, t_n + \Delta t)$ et on veut calculer $U(x, z, t_n + \Delta)$.

Effectuons le changement de fonctions suivant :

$$U(x, z, t) = e^{\alpha(t - t_n)} W(x, z, t)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} t_n \leq t \leq t_n + \Delta t \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Pour } t = t_n \quad U(x, z, t_n) = W(x, z, t_n)$$

$W(x, z, t)$ est un vecteur colonne formé des nouvelles fonctions inconnues :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha e^{\alpha(t - t_n)} W + e^{\alpha(t - t_n)} \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{\alpha(t - t_n)} \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = e^{\alpha(t - t_n)} \frac{\partial W}{\partial z}$$

Le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par $W(x, z, t)$ devient après ce changement de fonctions

$$W_t + \alpha W + A W_x + B W_z + e^{-\alpha(t-t_n)} C = 0 \quad (\text{II. 4})$$

Désignons par V une approximation de W au point $(k\Delta x, j\Delta z, t_n)$.

Le système aux différences finies approchant (II. 4) au point $(k\Delta x, j\Delta z, t_n)$ est :

$$V_{k,j}^{n+1} - V_{k,j}^n + \alpha \Delta t V_{k,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n (V_{k+1,j}^n - V_{k,j}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n (V_{k,j+1}^n - V_{k,j}^n) + \Delta t \cdot C = 0$$

$$V_{k,j}^{n+1} = \left[(1 - \alpha \Delta t) I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n \right] V_{k,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n V_{k+1,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n V_{k,j+1}^n - \Delta t C$$

Les conditions de stabilité sont :

$$\left| 1 - \alpha \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x} u + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2\rho}{\Delta x} + \frac{2\rho}{\Delta z} \right) \leq 1 \quad (\text{II. 5})$$

$$\left| 1 - \alpha \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x} u + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2}{\rho \Delta x} \right) \leq 1 \quad (\text{II. 6})$$

$$\left| 1 - \alpha \Delta t + \frac{\Delta t}{\Delta x} u + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2}{\rho \Delta z} \right) \leq 1 \quad (\text{II. 7})$$

$$\left| 1 - \alpha \Delta t + \Delta t \frac{u}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2 \gamma P}{\Delta x} + \frac{2 \gamma P}{\Delta z} \right) \leq 1 \quad (\text{II. 8})$$

L'étude de la stabilité est faite sur la condition (II. 5). Les résultats pour les autres inégalités s'en déduisent facilement.

$$\text{Posons } E = \varepsilon_1 \frac{|u|}{\Delta x} + \varepsilon_2 \frac{|w|}{\Delta z} \quad \text{avec } \varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } u \neq 0 \\ -1 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

$$E_1 = \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z}$$

$$F = \frac{2 \rho}{\Delta x} + \frac{2 \rho}{\Delta z}$$

$$\text{d'où } |1 + \Delta t (E - \alpha)| + \Delta t (E_1 + F) \leq 1 \quad (\text{II. 9})$$

$$|1 + \Delta t (E - \alpha)| \leq 1 - \Delta t (E_1 + F)$$

Cette inégalité n'a de sens que si $1 - \Delta t (E_1 + F) > 0$ c'est à dire

$$\Delta t < \frac{1}{E_1 + F}$$

Dans ces conditions (II. 9) est équivalente à :

$$-1 + \Delta t (E_1 + F) \leq 1 + \Delta t (E - \alpha) \leq 1 - \Delta t (E_1 + F)$$

d'où

$$\text{a) } 1 + \Delta t (E - \alpha) \leq 1 - \Delta t (E_1 + F)$$

$$\Delta t (E - \alpha + E_1 + F) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq E + E_1 + F \quad (\text{II. 10})$$

$$\text{b) } -1 + \Delta t (E_1 + F) \leq 1 + \Delta t (E - \alpha)$$

$$\Delta t (E_1 + F - E + \alpha) = 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{2}{E_1 + F - E + \alpha}$$

puisque $E_1 + F - E + \alpha > 0$

Nous devons vérifier que
$$\frac{2}{E_1 + F - E + \alpha} \leq \frac{1}{E_1 + F}$$

$$2E_1 + 2F \leq E_1 + F - E + \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq E_1 + F + E$$

Nous retrouvons la condition (II. 10)

Conclusion : Si nous choisissons $\alpha \geq E + E_1 + F$ et $\Delta t \leq \frac{2}{E_1 + F - E + \alpha}$

alors le système est stable.

La stabilité étant assurée, on voudrait Δt le plus grand possible, donc $(E_1 + F - E + \alpha)$ le plus petit possible. Le minimum de cette expression est obtenu pour $\alpha = E + E_1 + F$

$$E_1 + F - E + \alpha = E_1 + F - E + E + E_1 + F = 2 (E_1 + F)$$

$$\text{d'où} \quad \Delta t \leq \frac{2}{2 (E_1 + F)} = \frac{1}{E_1 + F}$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2 \rho}{\Delta x} + \frac{2 \rho}{\Delta z}}$$

Les différentes inégalités (II. 5, II. 6, II. 7, II. 8) donnent respectivement :

$$\alpha_1 \geq E + E_1 + \frac{2 \rho}{\Delta x} + \frac{2 \rho}{\Delta z}$$

$$\Delta t_1 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2 \rho}{\Delta x} + \frac{2 \rho}{\Delta z}}$$

$$\alpha_2 \geq E + E_1 + \frac{2}{\rho \Delta x}$$

$$\Delta t_2 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2}{\rho \Delta x}}$$

$$\alpha_3 \geq E + E_1 + \frac{2}{\rho \Delta z}$$

$$\Delta t_3 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2}{\rho \Delta z}}$$

$$\alpha_4 \geq E + E_1 + 2 \frac{\gamma P}{\Delta x} + \frac{2 \gamma P}{\Delta z}$$

$$\Delta t_4 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2 \gamma P}{\Delta x} + \frac{2 \gamma P}{\Delta z}}$$

La condition locale de stabilité est :

$$\bar{\alpha} = \text{Max} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

$$\bar{\Delta t} = \text{Min} (\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4)$$

Pour tous les points réguliers du réseau, nous avons la condition de stabilité

$$\alpha = \text{Max}_{x, z \in \mathcal{D}} (\bar{\alpha})$$

$$\Delta t = \text{Min}_{x, z \in \mathcal{D}} (\bar{\Delta t})$$

Il reste à approcher les conditions aux limites et d'étudier la stabilité des schémas aux différences finies correspondantes.

Les conditions de stabilité aux points sur le contour sont :

$$\left| 1 - \alpha \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} u + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2\rho}{\Delta x} + \frac{2\rho}{\Delta z} \right) \leq 1$$

$$\left| 1 - \alpha \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta s} V \right| + \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta s} \frac{1}{|\cos \theta|} + 2 \frac{|\cos \theta|}{\rho \Delta s} \right) \leq 1$$

$$\left| 1 - \alpha \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta s} V \right| + \Delta t \left(\frac{|w|}{\Delta s} \frac{1}{|\sin \theta|} + 2 \frac{|\sin \theta|}{\rho \Delta s} \right) \leq 1$$

$$\left| 1 - \alpha \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta x} u + \frac{\Delta t}{\Delta z} w \right| + \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2 \gamma P}{\Delta x} + \frac{2 \gamma P}{\Delta z} \right) \leq 1$$

Nous retrouvons les mêmes types d'inégalités que pour les points réguliers. Nous donnons simplement les résultats sans démonstration.

Les conditions locales de stabilité sont :

$$\alpha_1 \geq 2 \left(\frac{|w|}{\Delta z} + \frac{\rho}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta z} \right)$$

$$\Delta t_1 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2 \rho}{\Delta x} + \frac{2 \rho}{\Delta z}}$$

$$\alpha_2 \geq 2 \frac{|\cos \theta|}{\rho \Delta s}$$

$$\Delta t_2 \leq \frac{1}{\frac{V}{\Delta s} + 2 \frac{|\cos \theta|}{\rho \Delta s}}$$

$$\alpha_3 \geq 2 \frac{|\sin \theta|}{\rho \Delta s}$$

$$\Delta t_3 \leq \frac{1}{\frac{V}{\Delta s} + 2 \frac{|\sin \theta|}{\rho \Delta s}}$$

$$\alpha_4 \geq 2 \left(\frac{|w|}{\Delta z} + \frac{\gamma P}{\Delta x} + \frac{\gamma P}{\Delta z} \right)$$

$$\Delta t_4 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2 \gamma P}{\Delta x} + \frac{2 \gamma P}{\Delta z}}$$

II-3. Etude de la convergence. Estimation de l'erreur

Soit le système d'équations aux dérivées partielles :

$$W_t + \alpha W + A W_x + B W_z + e^{-\alpha(t-t_n)} C = 0 \quad (\text{II.11})$$

La résolution d'un tel système par une méthode explicite de différences finies conduit au système suivant :

$$V(t + \Delta t) = H(V, \Delta t, \Delta x, \Delta z) V(t) \quad (\text{II. 12})$$

Dans ce qui précède, nous avons étudié uniquement les problèmes de stabilité. Mais la stabilité n'entraîne pas toujours la convergence de la solution $V(x, z, t)$ fournie par le système (II. 12) vers la solution exacte $W(x, z, t)$ du système (II. 11)

Définition :

Le système (II. 12) est convergent d'ordre m si pour tout t on a :

$$\|W(x, z, t) - V(x, z, t)\| \leq O(\Delta t^{m+1})$$

Nous allons montrer que sous certaines conditions le schéma aux différences finies est convergent.

Equations aux différences finies :

$$V_{k,j}^{n+1} = \left((1 - \alpha \Delta t)I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n \right) V_{k,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n V_{k+1,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n V_{k,j+1}^n + \Delta t C \quad (\text{II. 13})$$

Le système (II. 11) donne :

$$\frac{W_{k,j}^{n+1} - W_{k,j}^n}{\Delta t} + \alpha W_{k,j}^n + A_{k,j}^n \frac{W_{k+1,j}^n - W_{k,j}^n}{\Delta x} + B_{k,j}^n \frac{W_{k,j+1}^n - W_{k,j}^n}{\Delta z} + C = R_{k,j}^n \quad (\text{II. 14})$$

ou :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{k,j}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} (k \Delta x, j \Delta z, t_n + \theta \Delta t) + \alpha W_{k,j}^n \\ + A_{k,j}^n \left(\frac{\partial W_{k,j}^n}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} (k \Delta x + \theta_1 \Delta x, j \Delta z, t_n) \right) \\ + B_{k,j}^n \left(\frac{\partial W_{k,j}^n}{\partial z} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} (k \Delta x, j \Delta z + \theta_2 \Delta z, t_n) \right) + C = R_{k,j}^n \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial W_{k,j}^n}{\partial t} + \alpha W_{k,j}^n + A_{k,j}^n \frac{\partial W_{k,j}^n}{\partial x} + B_{k,j}^n \frac{\partial W_{k,j}^n}{\partial z} + C = 0$$

$$\text{d'où} \quad R_{k,j}^n = \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial^2 W_{k,j}^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta x}{\Delta t} A_{k,j}^n \frac{\partial^2 W_{k,j}^n}{\partial x^2} + \frac{\Delta z}{\Delta t} B_{k,j}^n \frac{\partial^2 W_{k,j}^n}{\partial z^2} \right]$$

Si les dérivées secondes par rapport au temps et aux variables d'espace sont bornées, on a :

$$\|R_{k,j}^n\| \leq \frac{\Delta t}{2} M \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta t} \|A\| + \frac{\Delta z}{\Delta t} \|B\| \right)$$

Evaluons la différence $E_{k,j}^n = W_{k,j}^n - V_{k,j}^n$

Soustrayons (II. 13) de (II. 14)

$$\begin{aligned} E_{k,j}^n = \left((1 - \alpha \Delta t) I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n \right) E_{k,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n E_{k+1,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n E_{k,j+1}^n \\ + \Delta t R_{k,j}^n \end{aligned} \quad (\text{II. 15})$$

$$\text{Posons} \quad E(t) = \max_{k,j} |E_{k,j}^n| \quad R(t) = \max_{k,j} |R_{k,j}^n|$$

(II. 15) donne

$$\begin{aligned} \|E_{k,j}^{n+1}\| \leq & \left\| (1 - \alpha \Delta t)I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A + \frac{\Delta t}{\Delta z} B \right\| \cdot \|E_{k,j}^n\| + \frac{\Delta t}{\Delta x} \|A\| \cdot \|E_{k+1,j}^n\| \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta z} \|B\| \cdot \|E_{k,j+1}^n\| + \Delta t \|R_{k,j}^n\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|E_{k,j}^{n+1}\| \leq & \left(\left\| (1 - \alpha \Delta t)I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A + \frac{\Delta t}{\Delta z} B \right\| + \frac{\Delta t}{\Delta x} \|A\| + \frac{\Delta t}{\Delta z} \|B\| \right) \\ & \cdot \left(\max_{k,j} (\|E_{k,j}^n\|, \|E_{k+1,j}^n\|, \|E_{k,j+1}^n\|) \right) + \Delta t \|R_{k,j}^n\| \end{aligned}$$

d'où

$$\max_{k,j} \|E_{k,j}^{n+1}\| \leq \left(\left\| (1 - \alpha \Delta t)I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A + \frac{\Delta t}{\Delta z} B \right\| + \frac{\Delta t}{\Delta x} \|A\| + \frac{\Delta t}{\Delta z} \|B\| \right) \star$$

$$\max_{k,j} \|E_{k,j}^n\| + \Delta t \max_{k,j} \|R_{k,j}^n\|$$

$$\text{Si} \quad \left\| (1 - \alpha \Delta t)I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A + \frac{\Delta t}{\Delta z} B \right\| + \frac{\Delta t}{\Delta x} \|A\| + \frac{\Delta t}{\Delta z} \|B\| \leq 1$$

$$\text{alors} \quad E(t + \Delta t) \leq E(t) + \Delta t R(t)$$

La norme de matrice compatible avec la norme de vecteur

$$\|X\| = \text{Max}_i |x_i| \quad \text{est}$$

$$\|H\| = \text{Max}_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

Nous retrouvons alors les résultats connus à savoir l'étude de la stabilité par la condition suffisante.

Si le système aux différences finies est stable, on a

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \|A\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta t}{\Delta z} \|B\| \leq 1$$

$$\text{d'où} \quad R(t) \leq \frac{3}{2} \Delta t M$$

$$E(t + \Delta t) \leq E(t) + \frac{3}{2} \Delta t^2 M$$

En ajoutant toutes les inégalités obtenues pour $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ et en remarquant que $E(0) = 0$, on a

$$E(n\Delta t) \leq n \cdot \frac{3}{2} \Delta t^2 M$$

Si on suppose que la solution $W(x, z, t)$ est continue et deux fois différentiable, que toutes ses dérivées d'ordre 2 sont bornées et que la norme de la matrice de transfert H est inférieure à l'unité, alors la solution $V_{k,j}^n$ du système (II. 12) converge uniformément vers la solution $W_{k,j}^n$ du système (II. 11) pour $x \in [-X, X], z \in [z_c, Z]$ et $t \in [0, T]$.

Comme nous venons de le voir, la notion de stabilité est très importante. Elle est liée à la notion de convergence. Nous pouvons avoir un système aux différences finies stable mais non convergent.

II-4. Etude de la stabilité par la condition nécessaire

Nous avons vu que le schéma du 1^{er} type conduit au système différentiel ordinaire.

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = G(V) \cdot V + E \\ V(0) = U_0 \end{cases} \quad (\text{II. 16})$$

La discrétisation en t donne

$$V_{k,j}^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n \right) V_{k,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{k,j}^n V_{k+1,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} B_{k,j}^n V_{k,j+1}^n - \Delta t C$$

La condition nécessaire exige :

$$|\lambda_i| \leq 1 \quad \lambda_i \text{ valeur propre de } H$$

Le théorème d'Hadamard nous permet de localiser les valeurs propres sans les calculer.

Théorème d'Hadamard. Soient une matrice $A = (a_{ij})$ et les cercles C_i de centre a_{ii} , de rayon $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, alors les valeurs propres réelles

ou complexes de A sont situées à l'intérieur de l'union de ces cercles. L'application de ce théorème à la matrice H du schéma du 1^{er} type donne pour une ligne :

un cercle de centre $h_{ii} = 1 + \Delta t \left(\frac{u}{\Delta x} + \frac{w}{\Delta z} \right)$ et de rayon

$$r = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |h_{ij}| = \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2\rho}{\Delta x} + \frac{2\rho}{\Delta z} \right)$$

Pour satisfaire "au mieux" à l'inégalité de droite de (II.3), nous choisissons le centre du cercle entre $(-1, +1)$. Pour cela, il faut que

$$\begin{aligned} u < 0 \\ w < 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \Delta t \leq \frac{2}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z}}$$

Les intersections avec l'axe réel de ce cercle sont :

$$X_1 = 1 - \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} \right) + \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2\rho}{\Delta x} + \frac{2\rho}{\Delta z} \right) = 1 + 2\Delta t \left(\frac{\rho}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta z} \right)$$

$$X_2 = 1 - \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} \right) - \Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{2\rho}{\Delta x} + \frac{2\rho}{\Delta z} \right) = 1 - 2\Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{\rho}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta z} \right)$$

Pour que $-1 \leq \lambda_i$ il faut que $-1 \leq X_2$

$$-1 \leq 1 - 2\Delta t \left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{\rho}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta z} \right)$$

$$\text{d'où} \quad \Delta t_1 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{\rho}{\Delta x} + \frac{\rho}{\Delta z}}$$

Les autres lignes donnent des cercles concentriques (Fig. 2) et pour Δt

$$\Delta t_2 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{1}{\rho \Delta x}}, \quad \Delta t_3 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{1}{\rho \Delta z}}, \quad \Delta t_4 \leq \frac{1}{\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|w|}{\Delta z} + \gamma P \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta z} \right)}$$

En conclusion, le schéma du 1^e type est stable "au mieux", pour les points réguliers, si $u < 0$, $w < 0$ et $\Delta t = \text{Min} (\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4)$.

Il résulte de cette étude que l'approximation des dérivées d'espace dépend du signe de u et du signe de w , et que le choix de Δt est fonction de Δx , Δz et des valeurs locales de u , w , ρ , P . Il est indépendant du signe de u et w .

La même étude appliquée aux 3 autres types de schéma fournit :

- le schéma du 2^e type est stable si $u > 0$, $w > 0$
- le schéma du 3^e type est stable si $u > 0$, $w < 0$
- le schéma du 4^e type est stable si $u < 0$, $w > 0$

Un choix convenable de l'approximation des dérivées d'espace permet d'avoir un schéma aux différences finies stable. Tout ceci est résumé dans le tableau n° 1.

Tableau n° 1

	$\frac{\partial F}{\partial x}$	$\frac{\partial F}{\partial z}$
$u_{k,j}^n \geq 0$	$\frac{F_{k,j}^n - F_{k-1,j}^n}{x_k - x_{k-1}}$	$\frac{F_{k,j}^n - F_{k,j-1}^n}{z_j - z_{j-1}}$
$w_{k,j}^n \geq 0$		
$u_{k,j}^n < 0$	$\frac{F_{k+1,j}^n - F_{k,j}^n}{x_{k+1} - x_k}$	$\frac{F_{k,j+1}^n - F_{k,j}^n}{z_{j+1} - z_j}$
$w_{k,j}^n < 0$		
$u_{k,j}^n \geq 0$	$\frac{F_{k,j}^n - F_{k-1,j}^n}{x_k - x_{k-1}}$	$\frac{F_{k,j+1}^n - F_{k,j}^n}{z_{j+1} - z_j}$
$w_{k,j}^n < 0$		
$u_{k,j}^n < 0$	$\frac{F_{k+1,j}^n - F_{k,j}^n}{x_{k+1} - x_k}$	$\frac{F_{k,j}^n - F_{k,j-1}^n}{z_j - z_{j-1}}$
$w_{k,j}^n \geq 0$		

F pouvant être u, w, ρ, P

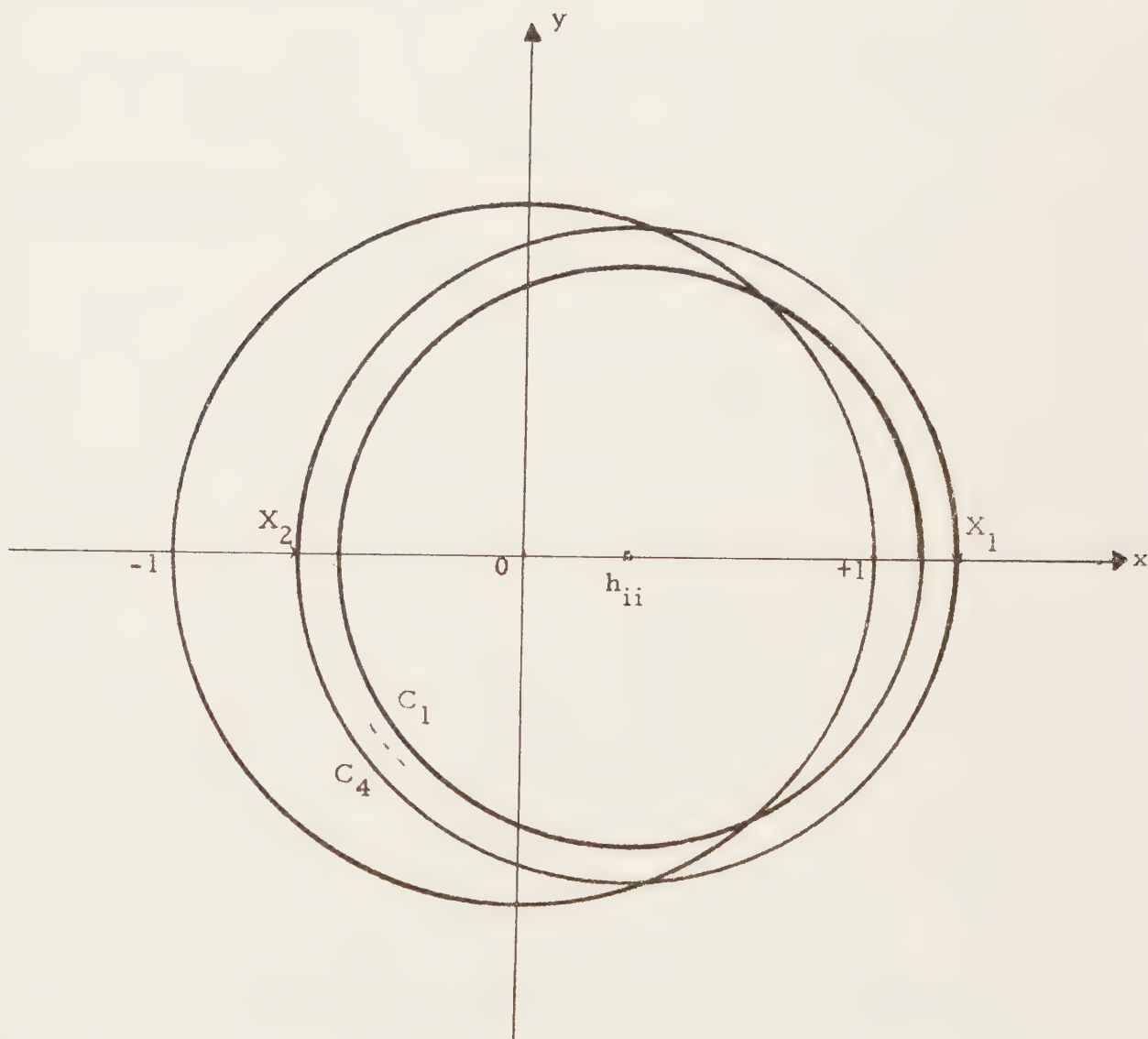


Fig. 2

Intersection des cercles C_i avec le cercle de rayon unité

III - RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous commençons par tester la méthode "d'amélioration de la stabilité" en l'appliquant à deux exemples simples, l'un linéaire, l'autre non-linéaire, dont les solutions exactes sont connues.

Exemple linéaire :

$$y' = y \qquad y(0) = 1 \qquad y(x) = e^x$$

la méthode des différences finies classique donne :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = y_n$$

$$y_{n+1} = (1+h) y_n$$

condition de stabilité $|1+h| \leq 1$

comme $h > 0$ le système est toujours instable.

Sur (x_n, x_{n+1}) posons $y(x) = e^{\alpha(x-x_n)} z(x)$

$$y(x_n) = z(x_n)$$

$$y'(x) = \alpha e^{\alpha(x-x_n)} z(x) + e^{\alpha(x-x_n)} z'(x) = e^{\alpha(x-x_n)} z(x)$$

$$z' = z(1-\alpha)$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = z_n(1-\alpha)$$

$$z_{n+1} = (1+h(1-\alpha))z_n$$

condition de stabilité $(1+h(1-\alpha)) \leq 1$

$$-1 \leq 1 + h(1 - \alpha) \leq 1$$

$$1 + h(1 - \alpha) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (1 - \alpha) \leq 0$$

$$-1 \leq 1 + h(1 - \alpha) \quad \Rightarrow \quad h \leq \frac{2}{\alpha - 1}$$

le système aux différences finies est stable si :

$$(1 - \alpha) \leq 0 \quad \text{et} \quad h \leq \frac{2}{\alpha - 1}$$

Application

$$\alpha = 1,1 \quad \text{d'où} \quad h \leq 20$$

Prenons $h = 0,1$

$$\begin{cases} z_{n+1} = 0,99 z_n \\ y_{n+1} = e^{\alpha h} z_{n+1} \end{cases}$$

Les résultats sont rassemblés dans le tableau 2.

x	z	y(calculé)	y(exact)	Erreur relative
0	1	1	1	0
0,1	0,99	1,105115	1,105171	$0,5 \cdot 10^{-4}$
0,2	1,094064	1,221277	1,221403	$1 \cdot 10^{-4}$
0,3	1,209064	1,349654	1,349859	$1,5 \cdot 10^{-4}$
0,4	1,336157	1,491525	1,491825	$2 \cdot 10^{-4}$
0,5	1,476610	1,648310	1,648721	$2,5 \cdot 10^{-4}$
0,6	1,631827	1,821576	1,822119	$2,9 \cdot 10^{-4}$
0,7	1,803360	2,013055	2,013753	$3,5 \cdot 10^{-4}$
0,8	1,992924	2,224661	2,225541	$3,9 \cdot 10^{-4}$
0,9	2,202414	2,458511	2,459603	$4,4 \cdot 10^{-4}$
1	2,433926	2,716943	2,718282	$5 \cdot 10^{-4}$

Tableau n° 2

$$\alpha = 1,1$$

$$h = 1$$

$$\begin{cases} z_{n+1} = 0,9 z_n \\ y_{n+1} = e^{\alpha h} z_{n+1} \end{cases}$$

les résultats sont rassemblés dans le tableau 3.

Exemple non-linéaire

$$y' = -y^2 \quad y(-2) = -0,5 \quad y = \frac{1}{x} \quad -2 \leq x \leq -1,5$$

La méthode aux différences finies classique donne

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = -y_n^2$$

$$y_{n+1} = (1 - hy_n)y_n$$

$$-1 \leq 1 - hy_n \leq 1$$

$$1 - hy_n \leq 1 \Rightarrow y_n > 0$$

$$-1 \leq 1 - hy_n \Rightarrow h \leq \frac{2}{y_n}$$

La condition de stabilité impose une condition $y_n > 0$ à la fonction inconnue $y(x)$, or $y(x)$ est négatif pour l'intervalle considéré. De plus, on ne connaît pas le signe de $y(x)$ en général.

Posons $y(x) = e^{\alpha(x-x_n)} z(x) \quad x \in (x_n, x_{n+1})$

$$y'(x) = \alpha e^{\alpha(x-x_n)} z(x) + e^{\alpha(x-x_n)} z'(x) = -e^{2\alpha(x-x_n)} z^2(x)$$

$$z' = -\alpha z - e^{\alpha(x-x_n)} z^2$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = -\alpha z_n - z_n^2$$

$$z_{n+1} = [1 - h(\alpha + z_n)] z_n$$

La condition de stabilité est $|1 - h(z_n + \alpha)| \leq 1$

$$1 - h(z_n + \alpha) \leq 1 \Rightarrow z_n + \alpha \geq 0$$

$$-1 \leq 1 - h(z_n + \alpha) \Rightarrow h \leq \frac{2}{z_n + \alpha}$$

Le schéma aux différences finies est stable si :

$$z_n + \alpha \geq 0 \quad \text{et} \quad h \leq \frac{2}{z_n + \alpha}$$

Application

$$z_n + \alpha = 0,1 \quad \text{d'où} \quad h \leq 20$$

$$h = 0,1$$

$$z_{n+1} = 0,99 z_n$$

$$y_{n+1} = e^{\alpha h} z_{n+1}$$

Tableau n° 5

x	z	y(calculé)	y(exact)	Erreur relative
-2	-0,5	-0,5	-0,5	0
-1,9	-0,495	-0,498061	-0,526316	5 10^{-2}
-1,8	-0,493080	-0,523572	-0,555556	5,7 10^{-2}
-1,7	-0,518336	-0,550390	-0,588235	6 10^{-2}
-1,6	-0,544886	-0,579737	-0,625000	7 10^{-2}
-1,5	-0,573940	-0,611872	-0,666667	8 10^{-2}

Cette méthode a l'avantage de rendre stable des schémas qui initialement ne le sont pas et de permettre de choisir des grands pas h. Mais un pas élevé entraîne une erreur importante. Il y a donc un compromis à établir entre la valeur de h et celle de l'erreur.

Cas de la perturbation d'obstacle

Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur CII 10 070 (40K-mots de 32 bits, $0,85_{\mu}s$ cycle de lecture-écriture).

Nous avons pris un réseau de 60×30 mailles. Le programme calcule u, w, ρ, P en tous les noeuds, y compris ceux du contour et aux temps successifs $t_0=0, t_1=t_0+\Delta t_1 \dots t_{n+1}=t_n+\Delta t_n$.

Le pas Δt_n est calculé par le programme pour qu'il vérifie la condition de stabilité.

- L'application de la méthode "d'amélioration de la stabilité" au problème de perturbation d'obstacle donne un pas très faible. Pour ne pas consommer trop de temps machine, nous avons volontairement limité le nombre d'expériences. Les résultats fournis confirment l'étude de la stabilité mais ne permettent pas de prévoir l'évolution de l'écoulement.

Cette méthode assure la stabilité mais elle se révèle trop coûteuse pour étudier un phénomène qui dure quelques heures sinon quelques jours.

- En approchant les dérivées d'espace selon les règles expliquées dans le tableau n° 1 et en choisissant Δt "au mieux" nous obtenons des résultats stables.

Ces résultats représentent une masse importante de valeurs numériques qu'il n'est pas matériellement possible de reproduire dans ce travail et dont la lecture serait très fastidieuse.

Malgré le nombre assez faible d'expériences, nous remarquons les phénomènes suivants :

- surpression avant la montagne et dépression après
- augmentation rapide des vitesses au sommet
- apparition de lignes de courant fermées et d'ondes se propageant dans la direction Ox .

Toutefois l'ensemble des résultats ne donne pas satisfaction, car en certains points la composante horizontale de la vitesse devient négative et le temps machine est dix fois supérieur au temps réel d'évolution de l'écoulement.

Il est peu probable que ces résultats soient dûs à la technique numérique. Nous pensons qu'il faut les attribuer à une instabilité du modèle lui-même ; du fait que la viscosité et les effets thermiques sont négligés.

Les résultats obtenus portent à croire, que sous certaines conditions initiales, il peut apparaître dans le domaine des régions où le gradient de vitesse devient infini, ce qui explique qu'il n'est pas possible de trouver de schéma aux différences finies stable si petit que soit Δt .

Dans les zones où la vitesse présente un caractère oscillatoire et varie rapidement, une discrétisation en x et en z ne peut donner une approximation suffisante, à moins d'utiliser un réseau d'une extrême finesse, ce qui conduit à des pas Δt extrêmement petits.

Conclusion

L'application de la méthode des différences finies au problème de perturbation d'obstacle est une technique numérique simple mais qui présente des difficultés d'emploi.

Ces difficultés apparaissent :

- Dans l'étude théorique de la stabilité insuffisamment développée à ce jour, pour les problèmes non-linéaires. La norme de matrice que nous avons choisie dans l'étude de la stabilité présente l'avantage d'être simple à calculer. Dans certains cas, elle permet de conclure rapidement, dans d'autres, elle se révèle impuissante. Il serait intéressant d'envisager l'utilisation d'autres définitions de la norme de matrice.

- Dans le choix du maillage. La limitation de la place mémoire et de temps de calcul introduisent une limite supérieure au nombre de noeuds du réseau. La maille utilisée est nécessairement large ce qui entraîne des approximations des dérivées d'espace pas très précises.

- Dans l'approche des conditions aux limites sur l'obstacle. Celles-ci contribuent à perturber la forme triangulaire de la matrice $G(V)$ ce qui empêche une étude stricte de la stabilité à l'aide des valeurs propres de $G(V)$.

- Lors de l'approximation des dérivées d'espace, surtout dans les régions où la vitesse de l'écoulement présente un caractère oscillatoire et des variations rapides.

Malgré toutes les précautions prises pour résoudre ces difficultés nous obtenons des résultats peu satisfaisants. Ceux-ci sont dûs :

- Soit à l'apparition d'ondes se propageant dans la direction Ox et dont l'amplitude augmente avec z car on tend vers le vide (la densité décroît exponentiellement quand z croît).

Dans ce cas, la méthode des différences finies est inadaptée, car le phénomène ne présente pas une régularité suffisante.

- Soit au modèle mathématique adopté, vraisemblablement instable de par sa nature. On peut se demander alors s'il n'est pas indispensable de le modifier, car il néglige totalement les effets de la viscosité et les effets thermiques en particulier ceux dûs à la condensation et à l'évaporation.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. LEGRAS -
Techniques de résolution des équations aux dérivées partielles. Dunod
2. J. LEGRAS -
Précis d'analyse numérique. Dunod
3. S.G. MIKALIN et K.L. SMOLITSKIY -
Approximate Methods for solution of differential and integral equations - Elsiever New-York.
4. R.S. VARGA -
Matrix iterative analysis. Prentice-Hall, New-Jersey.
5. H. SCHLICHTING -
Boundary-layer theory (traduit de l'allemand par J. KESTIN)
Mc GRAW-HILL book compagny, New-York.
6. J.H. BRAMBLE -
Numerical solution of partial differential equations. Académie press,
New-York.
7. R.D. RICHTMYER
Difference methods for initial-value problems.
Interscience publishers, New-York.
8. P. GERMAIN -
Mécanique des milieux continus . Masson et Cie.
9. SEMA RAPPORT 2 -
Perturbation d'obstacle dans un courant permanent rectiligne.
10. D. GREENSPAN -
Numerical solutions of non linear differential equations.
JOHN WILEY, New-York.

NOM DE L'ETUDIANT : AZZEDINE Mohamed

Nature de la thèse : DOCTEUR INGENIEUR

Vu, Approuvé

et Permis d'imprimer

NANCY, le 3 JUIN 1970

Le Doyen,

A handwritten signature in dark ink, consisting of a large, stylized 'J' followed by a horizontal line and a small flourish.

J. AUBRY

